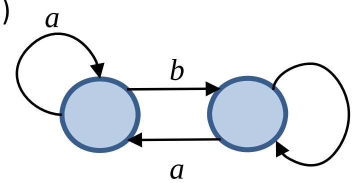
Φροντιστήριο 2 – Λύσεις

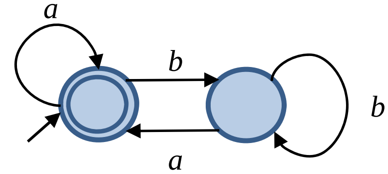
<u>Άσκηση 1</u>

Ποια από τα πιο κάτω αυτόματα αποτελούν DFA επί του αλφάβητου {*a*,*b*}. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

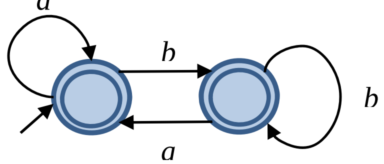
(i)



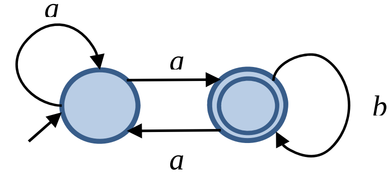
(ii)



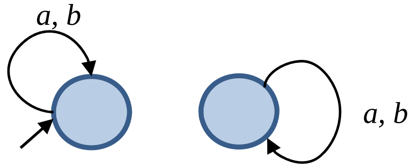
(iii)



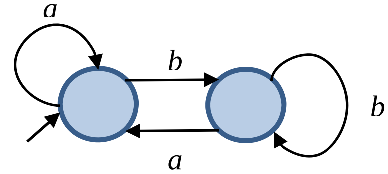
(iv)



(v)



(vi)



<u>Λύση</u>

(i) Όχι, δεν υπάρχει αρχική κατάσταση.
(ii) Ναι, το αυτόματο είναι DFA αφού ικανοποιεί τον σχετικό ορισμό.
(iii) Ναι, το αυτόματο είναι DFA αφού ικανοποιεί τον σχετικό ορισμό.
(iv) Όχι, στην αρχική κατάσταση ξεκινούν δυο ακμές με σύμβολο *a* και καμιά με *b*.
(v) Ναι, το αυτόματο είναι DFA αφού ικανοποιεί τον σχετικό ορισμό.
(vi) Ναι, το αυτόματο είναι DFA αφού ικανοποιεί τον σχετικό ορισμό.

<u>Άσκηση 2</u>

Για κάθε μια από τις πιο κάτω γλώσσες, να κατασκευάσετε αυτόματο επί του αλφάβητου {*a*,*b*} που να την αναγνωρίζει. Σε κάθε περίπτωση να δείχνετε (1) τον τυπικό ορισμό του αυτομάτου και (2) το διάγραμμα καταστάσεων.

(α) {w |η w αρχίζει από *a* ή τελειώνει σε *b*}

(β) {w |η w περιέχει την υπολέξη *aba*}

(γ) {w |η w αρχίζει με την υπολέξη *aba*}

(δ) {w |η w τελειώνει με την υπολέξη *aba*}

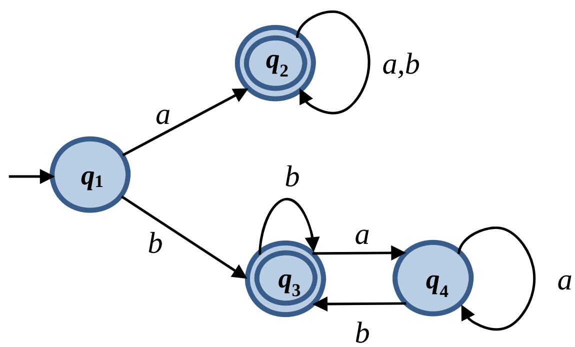
(ε) {w |η w δεν περιέχει την υπολέξη *aba*}

Λύση

(α) Το ζητούμενο αυτόματο είναι το M = ({q_1, q_2, q_3, q_4}, {a,b}, δ, {q_1}, {q_2, q_3}) όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	a	b
q_1	q_2	q_3
q_2	q_2	q_2
q_3	q_4	q_3
q_4	q_4	q_3

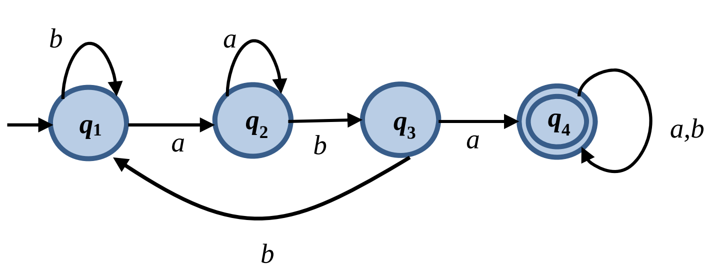
Το διάγραμμα καταστάσεων του αυτομάτου είναι το εξής:



(β) Το ζητούμενο αυτόματο είναι το M = ({q_1, q_2, q_3, q_4}, {a,b}, δ, {q_1}, {q_4}) όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	a	b
q_1	q_2	q_1
q_2	q_2	q_3
q_3	q_4	q_1
q_4	q_4	q_4

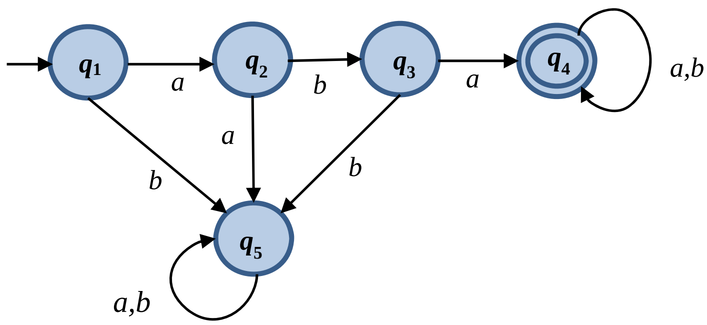
Το διάγραμμα καταστάσεων του αυτομάτου είναι το εξής:



(γ) Το ζητούμενο αυτόματο είναι το M = ({q_1, q_2, q_3, q_4, q_5}, {a,b}, δ, {q_1}, {q_4}) όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	a	b
q_1	q_2	q_5
q_2	q_5	q_3
q_3	q_4	q_5
q_4	q_4	q_4
q_5	q_5	q_5

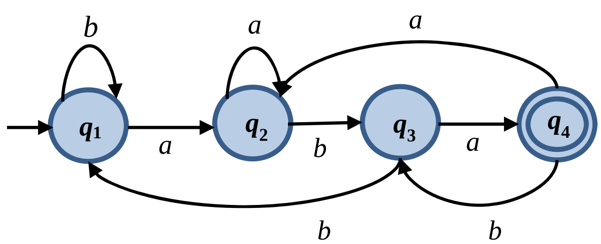
Το διάγραμμα καταστάσεων του αυτομάτου είναι το εξής:



(δ) Το ζητούμενο αυτόματο είναι το M = ({q_1, q_2, q_3, q_4}, {a,b}, δ, {q_1}, {q_4}) όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	a	b
q_1	q_2	q_1
q_2	q_2	q_3
q_3	q_4	q_1
q_4	q_2	q_3

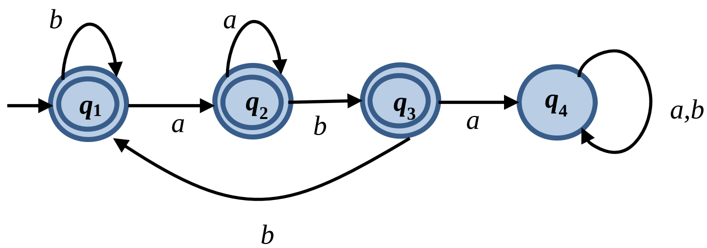
Το διάγραμμα καταστάσεων του αυτομάτου είναι το εξής:



(ε) Το ζητούμενο αυτόματο είναι το M = ({q_1, q_2, q_3, q_4}, {a,b}, δ, {q_1}, {q_1, q_2, q_3}) όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	a	b
q_1	q_2	q_1
q_2	q_2	q_3
q_3	q_4	q_1
q_4	q_4	q_4

Το διάγραμμα καταστάσεων του αυτομάτου είναι το εξής:



Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς την τομή. Δηλαδή, αν οι γλώσσες Α και Β είναι κανονικές τότε και η γλώσσα $A \cap B = \{w \mid w \in A$ και $w \in B\}$ είναι κανονική.

Λύση

Η απόδειξη είναι κατασκευαστική. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι αν υπάρχουν DFA που αναγνωρίζουν τις γλώσσες Α και Β, τότε υπάρχει DFA που αναγνωρίζει τη γλώσσα $A \cap B$.

Ας υποθέσουμε ότι τα αυτόματα $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ και $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ αναγνωρίζουν τις γλώσσες Α και Β αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε το $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ως εξής:

- $Q = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1, r_2 \in Q_2\}$
- Σ: το αλφάβητο είναι το ίδιο με αυτό των M_1 και M_2.
- Για κάθε $(r_1, r_2) \in Q$ και $a \in \Sigma$, θέτουμε
  $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \in Q \mid r_1 \in F_1$ και $r_2 \in F_2\} = F_1 \times F_2$

Σημειώνουμε ότι το αυτόματο αυτό είναι όμοιο με το αυτόματο που κατασκευάσαμε στη διαφάνεια 2-24 για αναγνώριση της γλώσσας $A \cup B$. Διαφέρει μόνο στο σύνολο αποδοχής, όπου θεωρούμε ότι μια κατάσταση $(r_1, r_2) \in Q$ είναι τελική αν και μόνο αν οι δύο καταστάσεις r_1 και r_2 είναι τελικές στα δύο επιμέρους αυτόματα.

Απομένει να επιβεβαιώσουμε ότι για οποιαδήποτε λέξη w επί του αλφάβητου Σ

$$w \in L(M) \text{ αν και μόνο αν } w \in L(M_1) \cap L(M_2).$$

Ας υποθέσουμε ότι $w = w_1 w_2 \ldots w_n \in L(M)$. Τότε, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $r_0, r_1, \ldots, r_n$ του Q που ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $r_0 = q_0$
2. $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$, για $i = 0,\ldots,n-1$, και
3. $r_n \in F$

Επομένως, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων (s_0, t_0), (s_1, t_1),…, (s_n, t_n) του Q όπου για κάθε i, $s_i \in Q_1$, $t_i \in Q_2$ και όπου η ακολουθία αυτή ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $(s_0, t_0) = (q_1, q_2)$
2. $\delta_1(s_i, w_{i+1}) = s_{i+1}$, $\delta_2(t_i, w_{i+1}) = t_{i+1}$ για $i = 0,…,n-1$, και
3. $s_n \in F_1$, $t_n \in F_2$.

Κατά συνέπεια, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων s_0, s_1,…, s_n, του Q_1 που ικανοποιεί τις συνθήκες

1. $s_0 = q_1$
2. $\delta_1(s_i, w_{i+1}) = s_{i+1}$, για $i = 0,…,n-1$, και
3. $s_n \in F_1$

και παρόμοια, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων t_0, t_1,…, t_n, του Q_2 που ικανοποιεί τις συνθήκες

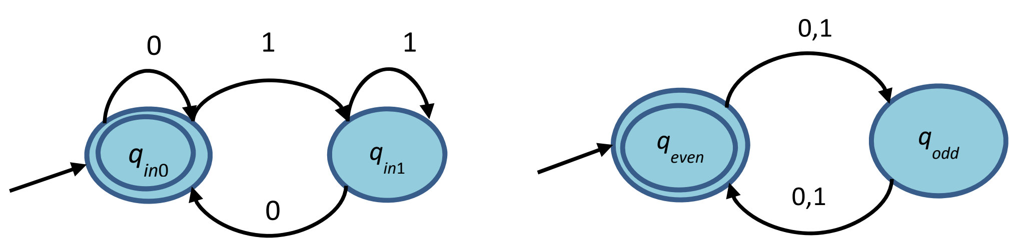
1. $t_0 = q_2$
2. $\delta_2(t_i, w_{i+1}) = t_{i+1}$, για $i = 0,…,n-1$, και
3. $t_n \in F_2$

Αυτό συνεπάγεται ότι $w \in L(M_1)$ και $w \in L(M_2)$. Επομένως, αν $w \in L(M)$ τότε $w \in L(M_1) \cap L(M_2)$.

Αντιστρέφοντας τα πιο πάνω επιχειρήματα, λαμβάνουμε ότι αν $w \in L(M_1) \cap L(M_2)$ τότε $w \in L(M)$, και το ζητούμενο έπεται.

Άσκηση 4

Χρησιμοποιώντας την κατασκευή σας από την Άσκηση 3, να σχεδιάσετε το διάγραμμα καταστάσεων αυτομάτου που αναγνωρίζει την τομή των γλωσσών των δύο πιο κάτω αυτομάτων.



Λύση