

Σειρά Προβλημάτων 1 – Λύσεις

Άσκηση 1

Ορίζουμε τη συναρμογή δύο γλωσσών A και B ως $AB = \{ uv \mid u \in A, v \in B \}$.

(α) Έστω $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ και $B = \mathbb{N}$. Να περιγράψετε τη γλώσσα AB .

(β) Θεωρήστε τις γλώσσες L, M και N . Να δείξετε ότι $L(M \cap N) \subseteq LM \cap LN$.

(γ) Επιπλέον, να δείξετε ότι η αντίστροφη σχέση, δηλαδή $L(M \cap N) \supseteq LM \cap LN$, δεν ισχύει επιδεικνύοντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Λύση

(α) Η γλώσσα AB περιέχει όλες τις λέξεις με δύο χαρακτήρες, ο πρώτος από τους οποίους είναι ένα από τα α, β και γ , και ο δεύτερος χαρακτήρας είναι ένας θετικός ακέραιος.

(β) Θα δείξουμε ότι για οποιοδήποτε στοιχείο $x \in L(M \cap N)$ ισχύει ότι $x \in LM \cap LN$.

Έστω $x \in L(M \cap N)$. Τότε, πρέπει να ισχύει ότι $x = yz$ όπου $y \in L$ και $z \in M \cap N$. Αφού $z \in M \cap N$, έχουμε ότι $z \in M$ και $z \in N$. Επομένως $yz \in LM$ και $yz \in LN$ και κατ' επέκταση $x = yz \in LM \cap LN$.

(γ) Αντιπαράδειγμα: $L = \{0, 01\}$, $M = \{10\}$, $N = \{0\}$

Για τα πιο πάνω σύνολα ισχύει

$$L(M \cap N) = \{0, 01\}(\{10\} \cap \{0\}) = \{0, 01\}\{\} = \{\}$$

$$LM \cap LN = \{0, 01\}\{10\} \cap \{0, 01\}\{0\} = \{010, 0110\} \cap \{00, 010\} = \{010\}$$

και προφανώς το σύνολο $L(M \cap N)$ ΔΕΝ είναι υπερσύνολο του $LM \cap LN$.

Άσκηση 2

Υποθέστε ότι το σύνολο L είναι μια γλώσσα επί του αλφαβήτου $\{a, b\}$ τα στοιχεία του οποίου είναι ακριβώς οι λέξεις που παράγονται από τους πιο κάτω κανόνες:

$$(1) \ \varepsilon \in L, a \in L, b \in L,$$

$$(2) \ \text{An } u \in L \text{ τότε } au \in L.$$

$$(3) \ \text{An } u \in L \text{ τότε } bu \in L.$$

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε λέξη $w \in L$ είναι καρκινική.

(β) Να αποδείξετε ότι αν η w είναι μια καρκινική λέξη, τότε $w \in L$.

[Μια λέξη ονομάζεται καρκινική (ή παλίνδρομο) αν διαβάζεται το ίδιο από αριστερά στα δεξιά και αντίστροφα.]

Λύση

Θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή στο μήκος της w .

Βάση της Επαγωγής: Αν $|w| = 0$, τότε $w = \varepsilon$ και $w \in L$, βάσει του κανόνα (1). Αφού η λέξη ε είναι καρκινική λέξη (παλίνδρομο) το ζητούμενο έπεται.

Επαγωγική Υπόθεση: Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $w \in L$, $|w| < k$, $k > 0$, ισχύει ότι η w είναι καρκινική.

Επαγωγικό Βήμα: Θεωρούμε μια λέξη $w \in L$, $|w| = k > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι η w είναι καρκινική. Ξεχωρίζουμε τρεις περιπτώσεις:

- Αν η w παράχθηκε από τον κανόνα 1, αφού το μήκος της w είναι μεγαλύτερο από 0, τότε $w = a$ ή $w = b$. Και στις δύο περιπτώσεις η w είναι παλίνδρομο και το συμπέρασμα έπεται.
- Αν η w παράχθηκε από τον κανόνα 2, τότε $w = auu$, για κάποιο $u \in L$. Από την υπόθεση της επαγωγής, πρέπει να ισχύει ότι u παλίνδρομο. Επομένως, και η λέξη $w = auu$ είναι παλίνδρομο και το ζητούμενο έπεται.
- Αν η w παράχθηκε από τον κανόνα 3, τότε $w = buu$, για κάποιο $u \in L$. Από την υπόθεση της επαγωγής, πρέπει να ισχύει ότι u παλίνδρομο. Επομένως, και η λέξη $w = buu$ είναι παλίνδρομο και το ζητούμενο έπεται.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

(β) Η απόδειξη θα γίνει και πάλι με επαγωγή πάνω στο μήκος της λέξης w .

Βάση της Επαγωγής: Αν $|w| = 0$, τότε απαραίτητα $w = \varepsilon$. Αφού η κενή λέξη παράγεται από τον κανόνα (1) τότε ανήκει στο σύνολο L και το ζητούμενο έπεται.

Παρόμοια, για $|w| = 1$ όπου $w = a$ ή $w = b$. Και οι δύο αυτές καρκινικές λέξεις παράγονται από τον κανόνα (1) και επομένως ανήκουν στο σύνολο L . Συνεπώς, το ζητούμενο έπεται.

Επαγωγική Υπόθεση: Ας υποθέσουμε ότι για κάθε καρκινική λέξη w όπου $|w| < k$, ισχύει ότι $w \in L$.

Επαγωγικό Βήμα: Θεωρούμε καρκινική λέξη w όπου $|w| = k > 1$. Πρέπει να δείξουμε ότι $w \in L$. Ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:

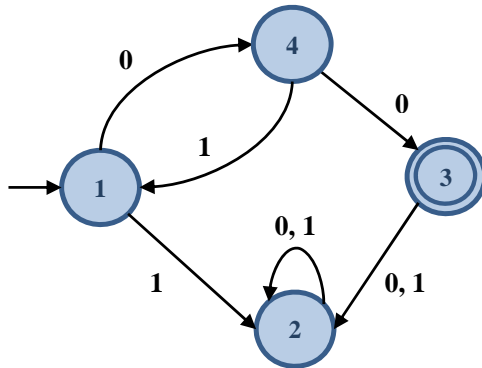
Αφού η w είναι καρκινική, τότε μπορεί να γραφτεί είτε ως aua είτε ως bub όπου u επίσης καρκινική λέξη. Από την υπόθεση της επαγωγής, αφού η u είναι καρκινική και έχει μήκος $k-2$ (μικρότερο από k) η λέξη u ανήκει στο σύνολο L , δηλαδή, αποτελεί λέξη που παράγεται από τους κανόνες. Αυτό όμως μας οδηγεί στο συμπέρασμα, με εφαρμογή του κανόνα (3), ότι και η λέξη w , μπορεί να παραχθεί από τους κανόνες. Συνεπώς, $w \in L$ και το ζητούμενο έπεται.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

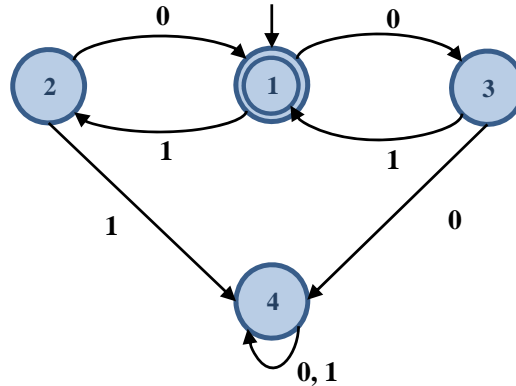
Άσκηση 3

Για κάθε ένα από τα πιο κάτω πεπερασμένα αυτόματα να παρουσιάσετε το αυτόματο μέσω του τυπικού ορισμού και να υπολογίσετε τη γλώσσα που αναγνωρίζει.

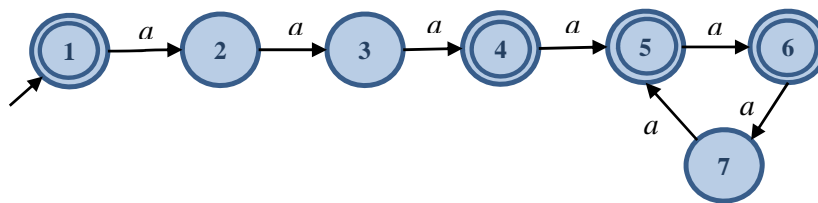
(α)



(β)



(γ)



(α) Ο τυπικός ορισμός του αυτόματου είναι:

$M = (\{1,2,3,4\}, \{0,1\}, \delta, 1, \{3\})$ όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	0	1
1	4	2
2	2	2
3	2	2
4	3	1

Το αυτόματο αποδέχεται όλες τις λέξεις που ξεκινούν με 0, συνεχίζουν με ≥ 0 επαναλήψεις της υπολέξης 10 και τελειώνουν σε 0.

(β) Ο τυπικός ορισμός του αυτόματου είναι:

$M = (\{1,2,3,4\}, \{0,1\}, \delta, 1, \{1\})$ όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	0	1
1	3	2
2	1	4
3	4	1
4	4	4

Το αυτόματο αποδέχεται όλες τις λέξεις που μπορούν να κτιστούν με μηδέν ή περισσότερες επαναλήψεις των συμβολοσειρών 01 και 10 (σε τυχαία σειρά).

(γ) Ο τυπικός ορισμός του αυτόματου είναι:

$M = (\{1,2,3,4,5,6,7\}, \{a\}, \delta, 1, \{1,4,5,6\})$ όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	a
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	5

Το αυτόματο αποδέχεται την πιο κάτω γλώσσα:

$$L = \{\epsilon, aaaS\} \cup \{a^{4+3k}, a^{5+3k} \mid k \geq 0\}$$

Άσκηση 4

Για κάθε μια από τις πιο κάτω γλώσσες, να κατασκευάσετε ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο που να την αναγνωρίζει. Σε κάθε περίπτωση να δείχνετε: (1) τον τυπικό ορισμό του αυτομάτου και (2) το διάγραμμα καταστάσεων.

(α) $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}, m+n \text{ περιττός ακέραιος}\}$

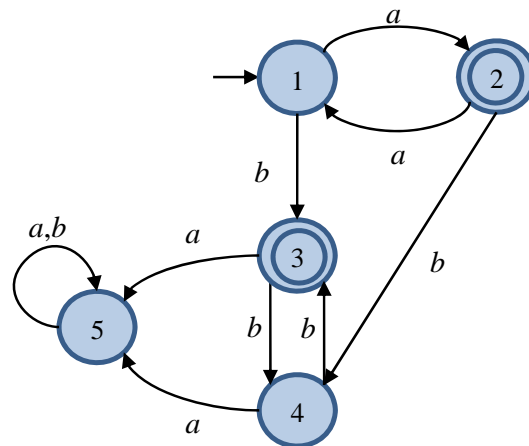
(β) $\{w \mid \eta \text{ w είναι μια μη κενή λέξη επί του αλφάβητου } \{a,b\} \text{ η οποία περιέχει άρτιο αριθμό από a και περιττό αριθμό από b}\}$

(γ) $\{w \mid \eta \text{ w είναι μια μη κενή λέξη επί του αλφάβητου } \{a,b\} \text{ η οποία περιέχει τουλάχιστον ένα a σε κάθε πεντάδα συνεχόμενων στοιχείων μετά από το πρώτο a}\}$

(δ) $\{w \mid \eta \text{ w είναι λέξη επί του αλφάβητου } \{a,b\} \text{ η οποία περιέχει τη συμβολοσειρά aba για άρτιο αριθμό φορών και δεν περιέχει τη συμβολοσειρά abb}\}$

Λύση

(α) Διάγραμμα καταστάσεων:

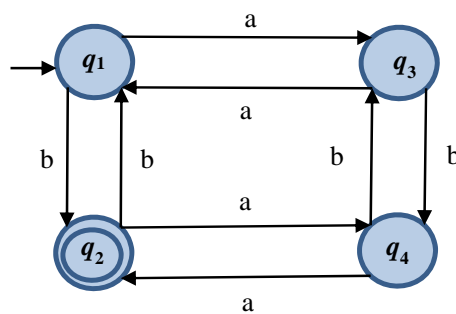


Τυπικός ορισμός: $(Q, \Sigma, \delta, 1, F)$, όπου

- $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $F = \{2, 3\}$
- δ όπως ορίζεται στον πίνακα που ακολουθεί:

δ	a	b
1	2	3
2	1	4
3	5	4
4	5	3
5	5	5

(β) Διάγραμμα καταστάσεων:

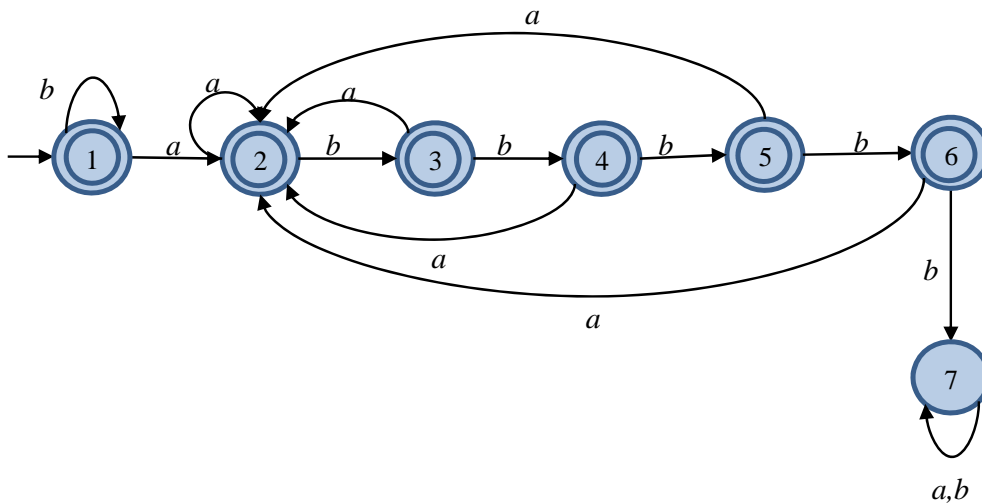


Τυπικός ορισμός: $(Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$, όπου

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $F = \{q_2\}$
- δ όπως ορίζεται στον πίνακα που ακολουθεί:
-

δ	a	b
q_1	q_3	q_2
q_2	q_4	q_1
q_3	q_1	q_4
q_4	q_2	q_3

(γ) Διάγραμμα καταστάσεων:

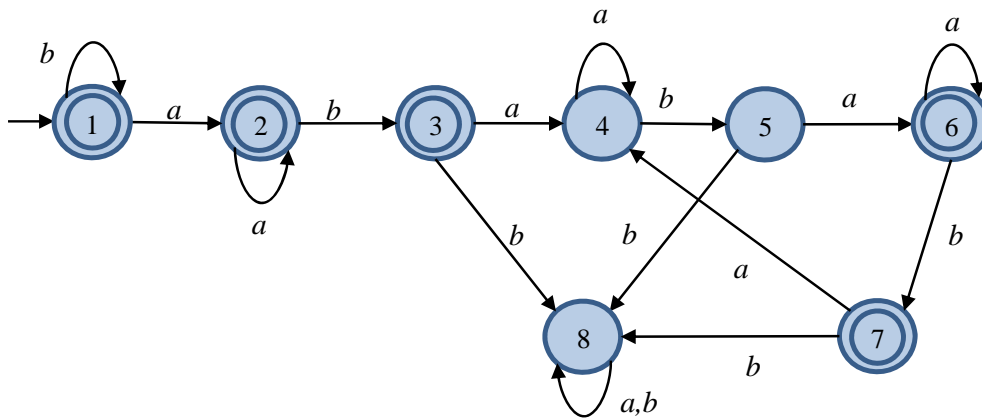


Τυπικός ορισμός: $(Q, \Sigma, \delta, 2, F)$, όπου

- $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- δ όπως ορίζεται στον πίνακα που ακολουθεί:

δ	a	b
1	2	1
2	2	3
3	2	4
4	2	5
5	2	6
6	2	7
7	7	7

(δ) Διάγραμμα καταστάσεων:



Τυπικός ορισμός: $(Q, \Sigma, \delta, 1, F)$, όπου

- $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $F = \{1, 2, 3, 6, 7\}$
- δ όπως ορίζεται στον πίνακα που ακολουθεί:

δ	a	b
1	2	1
2	2	3
3	4	8
4	4	5
5	6	8
6	6	7
7	4	8
8	8	8

Άσκηση 5

Θεωρήστε τρεις κανονικές γλώσσες L_1 , L_2 και L_3 . Να αποδείξετε ότι η γλώσσα $(L_1 \cap L_2) - L_3$ είναι επίσης μια κανονική γλώσσα.

Λύση

Η απόδειξη είναι κατασκευαστική. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι αν υπάρχουν DFA που αναγνωρίζουν τις γλώσσες L_1 , L_2 και L_3 , τότε υπάρχει DFA που αναγνωρίζει τη γλώσσα $(L_1 \cap L_2) - L_3$.

Η βασική ιδέα της κατασκευής είναι ότι, για να παρακολουθεί το καινούριο αυτόματο την εξέλιξη των τριών επιμέρους αυτομάτων, οι καταστάσεις του θα αποτελούν τριάδες κάθε στοιχείο της οποίας θα αντιστοιχεί στην κατάσταση στην οποία θα βρισκόταν το κάθε ένα από τα τρία αυτόματα τη συγκεκριμένη στιγμή της εκτέλεσης. Το καινούριο αυτόματο θα αποδέχεται όταν βρίσκεται σε καταστάσεις όπου τα πρώτα δύο αυτόματα βρίσκονται σε τελική κατάσταση και το τρίτο αυτόματο βρίσκεται σε μη τελική κατάσταση. Επομένως, θα αποδέχεται όταν τα δύο πρώτα αυτόματα αποδέχονται τη λέξη και το τρίτο την απορρίπτει (δηλαδή, αν η λέξη ανήκει στο σύνολο γλώσσα $(L_1 \cap L_2) - L_3$).

Ας υποθέσουμε ότι τα αυτόματα $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ και $M_3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q_3, F_3)$ αναγνωρίζουν τις γλώσσες L_1 , L_2 και L_3 , αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε το $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ως εξής:

- $Q = \{(r_1, r_2, r_3) \mid r_1 \in Q_1, r_2 \in Q_2, r_3 \in Q_3\}$
- Σ : το αλφάβητο είναι το ίδιο με αυτό των M_1 , M_2 και M_3 .
- Για κάθε $(r_1, r_2, r_3) \in Q$ και $a \in \Sigma$, θέτουμε
 $\delta((r_1, r_2, r_3), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a), \delta_3(r_3, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2, q_3)$
- $F = \{(r_1, r_2, r_3) \in Q \mid r_1 \in F_1, r_2 \in F_2, r_3 \notin F_3\}$

Απομένει να επιβεβαιώσουμε ότι για οποιαδήποτε λέξη w επί του αλφάβητου Σ

$$w \in L(M) \text{ αν και μόνο αν } w \in (L_1 \cap L_2) - L_3.$$

Ας υποθέσουμε ότι $w = w_1 w_2 \dots w_n \in L(M)$. Τότε, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων r_0, r_1, \dots, r_n του Q που ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $r_0 = q_0$
2. $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$, για $i = 0, \dots, n-1$, και
3. $r_n \in F$

Επομένως, υπάρχει ακολουθία τριάδων-καταστάσεων $(p_0, s_0, t_0), (p_1, s_1, t_1), \dots, (p_n, s_n, t_n)$ του Q όπου για κάθε i , $p_i \in Q_1$, $s_i \in Q_2$, $t_i \in Q_3$, και όπου η ακολουθία αυτή ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $(p_0, s_0, t_0) = (q_1, q_2, q_3)$
2. $\delta_1(p_i, w_{i+1}) = p_{i+1}$, $\delta_2(s_i, w_{i+1}) = s_{i+1}$, $\delta_3(t_i, w_{i+1}) = t_{i+1}$ για $i = 0, \dots, n-1$, και
3. $p_n \in F_1$, $s_n \in F_2$, $t_n \notin F_3$.

Κατά συνέπεια, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων p_0, p_1, \dots, p_n , του Q_1 που ικανοποιεί τις συνθήκες

1. $p_0 = q_1$
2. $\delta_1(p_i, w_{i+1}) = p_{i+1}$, για $i = 0, \dots, n-1$, και
3. $p_n \in F_1$

Παρόμοια, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων s_0, s_1, \dots, s_n , του Q_2 που ικανοποιεί τις συνθήκες

1. $s_0 = q_2$
2. $\delta_2(s_i, w_{i+1}) = s_{i+1}$, για $i = 0, \dots, n-1$, και
3. $s_n \in F_2$

ενώ, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων t_0, t_1, \dots, t_n , του Q_3 που ικανοποιεί τις συνθήκες

1. $t_0 = q_3$
2. $\delta_3(t_i, w_{i+1}) = t_{i+1}$, για $i = 0, \dots, n-1$, και
3. $t_n \notin F_3$

Αυτό συνεπάγεται ότι $w \in L(M_1)$, $w \in L(M_2)$ και $w \notin L(M_3)$. Επομένως, αν $w \in L(M)$ τότε $w \in (L_1 \cap L_2) - L_3$.

Αντιστρέφοντας τα πιο πάνω επιχειρήματα, λαμβάνουμε ότι αν $w \in (L_1 \cap L_2) - L_3$ τότε $w \in L(M)$, και το ζητούμενο έπεται.